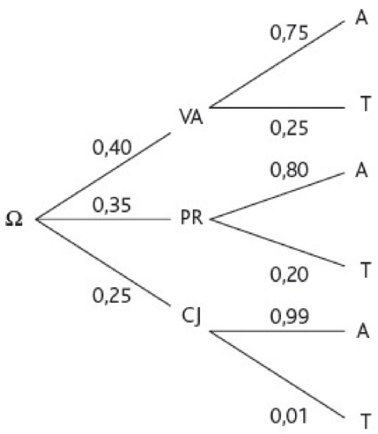
5. Corrections des exercices

Exercice 2.1 **Correction :**
On utilise la formule du cours :
$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}01}{0{,}2} = \frac{1}{20} = 0,05$
$P_A(B) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}01}{0{,}1} = \frac{1}{10} = 0,1$

Exercice 2.2 **Correction :**
On sait d'après le cours que $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, donc $P(A\cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
Ici, il vient : $P(A\cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.
De la même manière, $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, donc $P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P_B(A)}$.
D'où : $P(B) = \frac{1}{12} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{2}$.
Enfin, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Exercice 2.3 **Correction :**
1) $P_C(D) = \frac{1}{13}$, car il y a une seule dame de cœur parmi les 13 cartes à cœur.
$P_R(C) = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$, car il y a 13 cartes à coeur parmi les 26 cartes rouges (ou bien : la moitié des cartes rouges sont des "cœur").
$P(F\cap T) = \frac{3}{52}$, car il y a 3 figures (Roi, Dame, Valet) à trèfle dans le jeu de 52 cartes.
$P(D\cup C) = P(D) + P(C) - P(D\cap C) = \frac{4}{52} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.
2) $P(F\cap R) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$ (il y a 3 figures à cœur + 3 figures à carreau).
3) $P_D(T) = \frac{D\cap T}{P(D)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{\cancel{52}} \times \frac{\cancel{52}}{4} = \frac{1}{4}$.
On peut obtenir ce résultat directement car sur 4 dames, il n'y a qu'une dame de trèfle. Mais le correcteur veut sans doute voir "la formule du cours"...

Exercice 2.4 **Correction :**
1) Dans l'arbre ci-dessous, on on "VA" pour variétés, "PR" pour pop-rock, "CJ" pour classique-jazz, "A" pour album et "T" pour 2-titres.

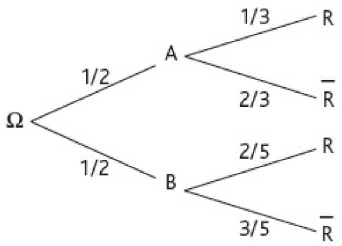


"Petit truc" : *lorsque l'on est "perdu" dans un exercice de probabilités, faire un "arbre" permet presque toujours de bien comprendre ce qui se passe et de savoir comment prendre l'exercice.*
2) Les albums font partie de l'une des catégories "variétés", ou bien "pop-rock", ou bien "classique-jazz" (et ces catégories sont "disjointes" : un album ne peut pas, dans cet exercice, faire partie de plusieurs catégories à la fois). Pour obtenir la probabilité d'avoir choisi un album, on doit ajouter les probabilités de chacun des chemins de l'arbre pondéré correspondant respectivement à : "album de variétés" ($VA\cap A$), "album de pop-rock" ($PR\cap A$) et "album de classique-jazz" ($CJ\cap A$). Les probabilités correspondant à chacun de ces chemines se calculent en effectuant le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin.
$P(A) = P(VA\cap A) + P(PR\cap A) + P(CJ\cap A) = 0,40 \times 0,75 + 0,35 \times 0,80 + 0,25 \times 0,99 = 0,8275$ (ou $\frac{331}{400}$).
3) On cherche à déterminer $P_A(CJ)$. D'après le cours, $P_A(CJ) = \frac{P(A\cap CJ}{P(A)} = \frac{0{,}25\times 0{,}99}{0{,}8275} \simeq 0,299$
Valeur exacte (pas du tout nécessaire en probabilités) : $P_A(CJ) = \frac{\frac{25}{100}\times\frac{99}{100}}{\frac{331}{400}} = \frac{99\times 25}{100\cancel{00}} \times \frac{4\cancel{00}}{331} = \frac{99\times\cancel{25}\times\cancel{4}}{\cancel{4}\times\cancel{25}\times 331} = \frac{99}{331}$.

Exercice 2.5 **Correction :**
1) Les événements F, A, C et I sont disjoints (l'internaute ne commandera pas son matériel sur deux sites en même temps), et leur réunion est l'univers Ω (il achètera nécessairement son matériel sur l'un des sites de ces pays). Ainsi, les événements F, A, C et I forment une partition de l'univers Ω

On a donc : $P(F)+P(A)+P(C)+P(I)=1$ Avec les données de l'énoncé, il vient :
$P(F)+P(F)+P(C)+P(C)=1$
$\frac{1}{2}P(C)+\frac{1}{2}P(C)+P(C)+P(C)=1$
$3P(C)=1$, donc $P(C)=P(I)=\frac{1}{3}$.
Par suite, $P(F)=P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.
2.a) D'après la formule du cours, $P_A(S)=\frac{P(S\cap A)}{P(A)}$;
donc $P(S\cap A)=P(A)\times P_A(S)=\frac{1}{6}\times 0,5=\frac{1}{12}\simeq 0,083$
2.b) Les événements F, A, C et I formant une partition de l'univers Ω, on peut utiliser la *formule des probabilités totales* (il y a souvent des points prévus dans les barèmes pour les noms des formules).
$P(S)=P(S\cap F)+P(S\cap A)+P(S\cap C)+P(S\cap I)$.
Comme à la question 2.a, on détermine :
$P(S\cap F)=P(F)\times P_F(S)=\frac{1}{6}\times 0,2=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30}\simeq 0,033$
$P(S\cap C)=P(C)\times P_C(S)=\frac{1}{3}\times 0,1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{30}\simeq 0,033$
$P(S\cap I)=P(I)\times P_I(S)=\frac{1}{3}\times 0,4=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}\simeq 0,133$
D'après la formule des probabilités totales, il vient :
$P(S)=\frac{1}{30}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{2}{15}=\frac{17}{60}\simeq 0,283$
2.c)On cherche $P_S(C)$, c'est une probabilité conditionnelle.
$P_S(C)=\frac{P(S\cap C)}{P(S)}=\frac{1/30}{17/60}=\frac{2}{17}\simeq 0,118$

Exercice 2.6 **Correction :**
1)



2) D'après l'arbre ci-dessus, $P_A(R)=\frac{1}{3}$ et $P_B(R)=\frac{2}{5}$.
3) Les événements A et B sont disjoints, et leur réunion est l'univers Ω : ils forment donc une partition de Ω, et on peut appliquer la *formule des probabilités totales* :

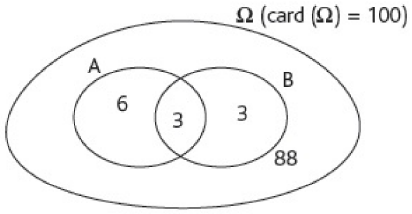
$$P(R)=P(R\cap A)+P(R\cap B) \tag{2.1}$$
$$=P(A)\times P_A(R)+P(B)\times P_B(R) \tag{2.2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{5} \tag{2.3}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{5} \tag{2.4}$$
$$=\frac{11}{30} \tag{2.5}$$

La ligne "2.1" montre au correcteur que l'on applique correctement la *formule des probabilités totales*.
De même, on pourrait avoir envie de ne pas écrire la ligne "2.2" au motif qu'on a utilisé l'arbre, mais dans certains barèmes cette ligne rapporte des points car elle montre que l'on connaît la *formule de calcul des probabilités conditionnelles* ($P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$).
4) Il s'agit d'une probabilité conditionnelle :
$P_R(B)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{30}}=\frac{1}{5}\times\frac{30}{11}=\frac{6}{11}$.

Exercice 2.7 **Correction :**
L'élément important de l'énoncé est le fait que les événements A et B soient *indépendants*. On a donc $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.
Ainsi, $P(A\cap B)=0,2\times 0,3=0,06$.
Par suite, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,2+0,3-0,06=0,44$

Exercice 2.8 **Correction :**
1) La "formule" $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ est une *caractérisation* des événements indépendants : cette égalité est vraie lorsque A et B sont indépendants, et fausse lorsqu'ils ne le sont pas. Elle sert donc de "test" pour vérifier si deux événements sont indépendants, comme dans cet exercice

On a d'une part : $P(A \cap B) = 0,03$
et d'autre part : $P(A) \times P(B) = 0,09 \times 0,06 = 0,0054$
ces deux résultats ne sont *pas égaux*, on peut donc conclure que les événements A et B ne sont *pas indépendants*.
2) Attention, il ne s'agit pas des "9%" donnés dans l'énoncé ; en effet, ce chiffre de "9%" concerne les processeurs ayant le défaut A, mais pas *uniquement* le défaut A. Il faut donc lui soustraire la fréquence correspondant aux processeurs qui ont les défauts A et B :
La probabilité que le processeur ait uniquement le défaut A est :
$P(A) - P(A \cap B) = 0,09 - 0,03 = 0,06 = 6\%$
Sur 100 , on aurait donc :



3) Rappel :$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
La probabilité que le processeur ne présente aucun défaut est :
$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0,09 + 0,06 - 0,03] = 0,88$,
ce qui correspond à l'interprétation graphique ci-dessus.

Exercice 2.9 **Correction :**
D'après la propriété sur les "expériences enchaînées", on a :

$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

Et pour la v.a. (variable aléatoire) Y :

$Y = y_i$	0	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$

2) Pour "tester" si les deux v.a. sont indépendantes, on va appliquer une méthode similaire à celle utilisée pour la question 1) de l'ex.57, en considérant les événements $X = 1$ et $Y = 1$:
On a d'une part : $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0$, car si l'on n'a qu'un seul lancer ($X = 1$), il est impossible d'avoir obtenu un chiffre différent de 1 ($Y = 1$), car obtenir un tel chiffre nous contraindrait à relancer, et l'on aurait donc au moins $X = 2$; il s'agit donc d'un événement impossible, et par suite sa probabilité est 0.
On a d'autre part : $P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{216}$
ces deux résultats ne sont *pas égaux*, on peut donc conclure que les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ ne sont *pas indépendants*. Dons les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
En effet, de telles variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ (les v.a. X et Y ne peuvent prendre que des valeurs entières) sont indépendantes ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n$ et $Y = n) = P(X = n) \times P(Y = n)$.
Ainsi, l'indépendance de deux variables aléatoires apparaît bien comme une généralisation de l'indépendance que nous avons définie pour deux événements.